DAS GENETISCHE PRINZIP UND DIE AXIOMATISCHE METHODE AM BEISPIEL DER EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTION

Helmut Heugl

Einleitung

Gerade der Lehrer erlebt es immer wieder, daß das Ansehen der Mathematik nicht im selben Maß zugenommen hat, wie die Bedeutung dieser Wissenschaft für viele Bereiche des Lebens.
Die Mathematik wird von vielen Menschen als eine Art "geistiger Zauberei" angesehen und man ist oft recht froh mit dieser Gilde der Zauberer nichts zu tun zu haben.
Was tragen wir zu diesem Image bei bzw. was könnten wir dazu beitragen, um dieses Image zu verbessern?
Es gibt zwei mögliche Ansatzpunkte:

(1) "der Stoff": Oft unterrichten wir Mathematik als Fertigprodukt. Freudenthal hat das mit seiner Interpretation des Sprichwortes "Quod licet Jovi non licet bovi" vielleicht überspitzt aber treffend ausgedrückt: Ich Jupiter (Lehrbuchautor oder Lehrer) habe die Welt für den Schüler mathematisch geordnet, warum soll er, der Ochse, da noch einmal von vorne anfangen?

Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Mathematik, so muß man feststellen, daß der Satz "Im Anfang war das Axiom" nur in den seltensten Fällen richtig ist. Anfangspunkt ist vielmehr häufig ein nichtmathematisches Problem. Die Mathematik soll Methoden entwickeln, um dieses Problem oder verwandte Probleme zu lösen.
Der nächste Schritt ist der Versuch einer genaueren Begründung der entwickelten Methoden.
Im Zuge der Begründung wird es dann notwendig, die grundlegenden Begriffe, die anfangs oft ziemlich unscharf formuliert wurden, kritisch zu hinterfragen.

(2) der Schüler: Beim Studium des Lehrplanes konzentriert man sich oft auf die Lehrziele, d.h. wir fragen: Welche Stoffinhalte sollen wir den Schüler lehren

Genauso wichtig ist aber die Frage nach den Lernzielen: Was soll und was kann der Schüler lernen?
Eine grobe Einteilung dieser Zielsetzungen sieht etwa folgendermaßen aus:

1) Kenntnisse von Sachverhalten, Gesetzen, Sätzen.
2) Intellektuelle Techniken (Kenntnisse von Verfahrensregeln)
3) Kognitive Strategien (allgemeine intellektuelle Haltungen und Fähigkeiten)
   a) Argumentieren
   b) Sich kreativ verhalten
   c) Mathematisieren

Gerade auf den Punkt 3) wird oft zuwenig geachtet.

Interpretiert man aber "LERNEN" als eine ERWEITERUNG des BILDES der WIRKLICHKEIT, so ergibt sich daraus einerseits die Notwendigkeit, gerade diese Fähigkeiten im Mathematikunterricht zu fördern und andererseits müßte es eine starke Motivation sein, wenn man als Ausgangspunkt eines Problems jenes Bild der Wirklichkeit nimmt, das sich der Schüler angeeignet hat.
Wenn man die vorherige Beschreibung der Arbeitsweise der Mathematik und diese Definition des Lernens akzeptiert, müßte man mit Piaget übereinstimmen, der die These aufgestellt hat, daß bei der Genese des Wissens in den Wissenschaften und im Individuum die gleichen Mechanismen maßgebend sind.

Jene Methode, die diesem Mechanismus am besten Rechnung trägt, ist die

GENETISCHE METHODE

Da man sie als Vereinigung vieler didaktischer Prinzipien auffassen kann (Operatives Prinzip, Heuristisches Prinzip, Prinzip der Stabilisierung, Redundanzprinzip, Prinzip der Altersgemäßheit, Spiralprinzip, usw.), ist es schwer, in kurzen Worten das Wesentliche dieser Methode zu erfassen. Ich möchte das Erich Wittmann überlassen.
Er schreibt: Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnis-

theoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist. Entsprechend der Tatsache, daß sich Theorien in den exakten Wissenschaften bei der Untersuchung von Problemen durch Verfeinerung primitiver Vorformen entwickeln, kann man die genetische Darstellung durch folgende Merkmale charakterisieren:

1) Anschluß an das Verständnis des Adressaten
2) Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik
3) Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus
4) Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze, durchgehende Motivation und Kontinuität
5) Während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung

Die Exponential- und Logarithmusfunktion

Diese Funktionen eignen sich besonders gut als Beispiel für die genetische Methode:

> Wachstums- und Zerfallsprozesse oder allgemeine dynamische Prozesse, die sich in Raum und Zeit entwickeln, sind für viele Anwendungsbereiche von großer Bedeutung. Die sie beschreibenden Funktionen zählen neben der linearen Funktion zu den wichtigsten behandelten Funktionen.

Mit Hilfe der verbal gefaßten Eigenschaften der Exponentialfunktion können bereits in der Unterstufe wichtige Anwendungsgebiete erschlossen werden. Hilfsmittel sind dabei die Wertetabelle, der Taschenrechner und die graphische Darstellung.
Ein so früher Zugang ist natürlich nur unter Ausgliederung von Definitions- und Existenzproblemen möglich.
Wesentlich ist auch, daß der Vorschlag kein "Hineinstopfen" von neuem Stoff erfordert, sondern nur eine neue Sichtweise.

Tab (1)

KLASSE	ZEITPUNNKTE	WACHSTUMSFAKT.	BEVORZ.BASIS
3. u. 4.	äquidistant	2 bzw. ration. bes. $1 + \frac{p}{100}$	-----
5. u. 6.	beliebig	beliebig	$2,\ 1 + \frac{p}{100},\ e$
7. u. 8.	beliebig	beliebig	e

3. KLASSE

<u>Der Lehrstoff</u>: Potenzen, Rechnen mit dem Taschenrechner.

<u>Beispiel (1)</u>: Die von einer Wasserpflanze (oder Algenwachstum bzw. andere Formen von Umweltverschmutzungen) benötigte Fläche verdoppelt sich täglich. Nach wieviel Tagen ist die Hälfte eines Sees von der Größe 1 ha bedeckt, nach wieviel Tagen der ganze See?

Tab (2)

	Datum	Fläche (dm^2)	
10 Tage weiter	1.	1	
3 Tage weiter	2.	2 (·2)	.8
	3.	4 (·2)	
	4.	8	
	5.	16	.1024
	6.	32	
	7.	64	
	8.	128	
	9.	256	
	10.	512	
	11.	1024	
	12.	2048	

Aus dieser Tabelle sollen die Grundeigenschaften des exponentiellen Wachstums abgelesen werden:

GRUNDEIGENSCHAFT I : Zu gleichlangen Zeiten gehört der gleiche Wachstumsfaktor.

Schon auf dieser Stufe kann man darauf hinweisen, daß das Wachstum stetig ist und daß nur die Beschreibung sprunghaft ist.

Beispiel (2): Die bekannte "Schachbrettaufgabe"
Bei der Erstellung der Wertetabelle kann eine Faustregel, die aus der Tabelle (2) hergeleitet werden kann, verwendet werden:
" 10 Schritte weiter heißt vertausendfachen"

Tab (3)	Feld Nr.	Ungefähre Anzahl der Körner
10 Felder weiter	1	1
	11	1 000
	21	1 000 000
	31	1 000 000 000
	41	1 000 000 000 000
	51	1 000 000 000 000 000
3 Felder weiter	61	1 000 000 000 000 000 000
	64	8 000 000 000 000 000 000

Natürlich kann man das Ergebnis auch direkt mit dem Taschenrechner bekommen, nur kann man sich unter dieser Zahl in exponentieller Schreibweise noch weniger vorstellen. Unter Berücksichtigung der "enaktiven Phase", in der sich die Schüler noch befinden, könnte man sogar mit reellen Körnern arbeiten, sie zählen und dann wägen. Die Tatsache, daß auch das bald nicht mehr ausführbar ist, kann man als Modell für die Begrenztheit unseres Lebensraumes auffassen. Die graße Zahl kann man etwa durch folgende Frage veranschaulichen: Wie lange müßte ein Zug sein, der die Weizenmenge, die auf dem 64. Feld liegt, transportieren könnte ?

Zu bedenken wäre auch, daß das exponentielle Wachstum der Mengen auf den einzelnen Feldern untersucht wird und nicht die Gesamtzahl der Weizenkörner.

Weitere Beispiele : Anzahl von Einzellern bei sukzessiver Teilung, Dicke von Papier bei sukzessivem Falten, Anzahl der Vorfahren, Ausbreitung eines Gerüchts.

4. KLASSE

Der Lehrstoff: Aktivierung des Bruch- und Prozentrechnens.

Um die Prozentrechnung und gleichzeitig die exponentiellen Wachstumsprobleme zu wiederholen, verwendet man noch einmal das Beispiel der Wasserpflanze:

Beispiel (1): Wieviel Prozent der Seefläche sind jeweils noch frei ?

Tab (4)

Datum	freier Anteil
11.	99,9%
12.	99,8%
13.	99,6%
14.	99,2%
15.	98,4%
16.	96,9%
17.	93,7%
18.	87,5%
19.	75 %
20.	50 %
21.	0 %

Ergebnis: Selbst am drittletzten Tag ist der See im wesentlichen noch frei. Das heißt, man erkennt die Katastrophe relativ spät. Man sollte sich also besser um den "vernachlässigbaren" bedeckten Teil des Sees bzw. um das Wachstumsverhalten kümmern.

Eine wichtige Erkenntnis, durch die das Verständnis für Prozentrechnungsaufgaben wesentlich verbessert wird, ist folgende: Prozentangaben haben multiplikativen Charakter (leider muß auch beim Taschenrechner "+p%" eingegeben werden)

Tab (5)

+ p %	$\cdot(1 + \frac{p}{100})$
+ 5 %	$\cdot$ 1,05
+18 %	$\cdot$ 1,18
+30 %	$\cdot$ 1,30
+100 %	$\cdot$ 2,00
- 5 %	$\cdot$ 0,95
-20 %	$\cdot$ 0,80

Übersetzungsregel: Wächst um p % bedeutet: multipliziere mit $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Der Schüler sollte an passenden Beispielen auch erkennen, daß "Wachsen um p % und dann um q % " nicht bedeutet "Wachsen um (p+q) % ". Diese Beispiele sollten auch dem "Proportionalitätsirrglauben" entgegenwirken, der durch die Aufgabenstellung in den Unterstufenbüchern sehr gefördert wird.

Beispiel (2): Eine Bakterienkultur wächst um 45% je Stunde.
($N_o = 1000$) Wieviel Bakterien zählt man nach 2,3,10 Stunden?

Bei der Erstellung der Wertetabelle spielt der Taschenrechner eine wichtige Rolle.

Auch Zerfallsprozesse können schon behandelt werden:

Beispiel (3): Eine zerfallende Substanz nimmt um 3% je Stunde ab. Gesucht ist die Halbwertszeit, d. h. jene Zeit, nach der nur die Hälfte der Substanz vorhanden ist.

Tab (6)

	Zeitpunkt	Substanzmenge
Mo	10^h	200 mg
	11	194
	12	188,2
	13	182,5
	14	177,1
	⋮	⋮
Di	8^h	102,3
	9	99,3

Ergebnis: Die Halbwertszeit beträgt etwa 23 Stunden.

Mit Hilfe der Halbwertszeit kann man folgende Aufgabe wesentlich schneller lösen:

Beispiel (4) : Nach wieviel Stunden (Tagen) ist weniger als 1 mg der Substanz vorhanden?
(Halbwertszeit bedeutet Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$)

Tab (7)

$\boxed{23h}$

	Zeitpunkt	Substanzmenge
Mo	10^h	200 mg) $\cdot \boxed{\frac{1}{2}}$
Di	9	100
Mi	8	50
Do	7	25
⋮		⋮
Mo	3	1,8
Di	2	0,8

Weitere <u>Beispiele mit prozentualen Wachstumsfaktoren:</u>

Kapitalverzinsung, Inflationsrate, Wachstum von Organismen, Durchgang von Licht durch eine absorbierende Substanz, usw.

Durch die Erstellung der zugehörigen Wachstumstabellen kann man zu einer Verallgemeinerung der Grundregel I kommen:

> <u>GRUNDREGEL I a :</u> Zur n-fachen Zeit gehört die n-te Potenz des Wachstumsfaktors.

Eine weitere Faustregel, die bei Überschlagsrechnungen gut brauchbar ist, kann durch folgende Aufgabe gefunden werden:

<u>Beispiel (5):</u> Wie hängt die Verdopplungszeit von der Wachstumsraté ab ?

<u>Tab(8)</u>

Wachstumsrate p% je Schritt	Verdopplungszeit d in Schritten	p.d
1%	70	70
2%	35	70
3%	23	69
5%	14	70
7%	10	70
10%	7	70
20%	4	80
50%	2	100

Aus dieser Tabelle kann man erstens folgende Vermutung ablesen:

> <u>p mal d-Regel:</u> Für $0 < |p| \leq 10$ gilt: $p \cdot d \approx 70$

(in der 6. Klasse kann man diese Vermutung auch begründen)

Zweitens sollte man aber die Lehre daraus ziehen, daß man aus den ersten Zeilen nicht schließen darf, daß die Regel immer gilt.

5. KLASSE

Lehrstoff: Funktionen; Graphische Darstellung von Wachstumsfunktionen

Der Modellcharakter kommt besonders zum Ausdruck, wenn die Anwendung "nicht so genau stimmt", d.h. wenn sich die Wirklichkeit anders verhält, als ihr auf Grund der mathematischen Beschreibung zukäme. Die bisherige "sprunghafte" Beschreibung von Wachstumsfunktionen würde eigentlich eine Treppenfunktion ergeben.
Daraus ergibt sich die Frage:

"Haben Bakterien eine Uhr?" oder ist das Bevölkerungswachstum sprunghaft?

Versuch einer Interpolation

Beispiel: Bevölkerungswachstum

Tab (9)

		Jahr	Bevölkerungszahl (in Milliarden)		
		1972	3,8		
32 Jahre weiter	16			.x	
		1988	$\boxed{?}$		.2
	16			.x	
		2004	7,6		

Frage: Die Bevölkerung der Erde verdoppelt sich jeweils nach 32 Jahren. Im Jahre 1972 waren es 3,8 Milliarden Menschen. Wie groß wird die Bevölkerungszahl 16 Jahre später sein, also im Jahre 1988?

Proportionalitätsdenker sagen:" um 1,9 Milliarden mehr"

Erinnert man sich an die Grundregeln I und IIa so müßte für den gesuchten Wachstumsfaktor x folgendes gelten:

$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$
$$x \approx 1,414$$

Nun kann man die Tabelle 9 vervollständigen.

GRUNDREGEL

IIb Zur halben Zeit gehört immer die Quadratwurzel des Wachstumsfaktors

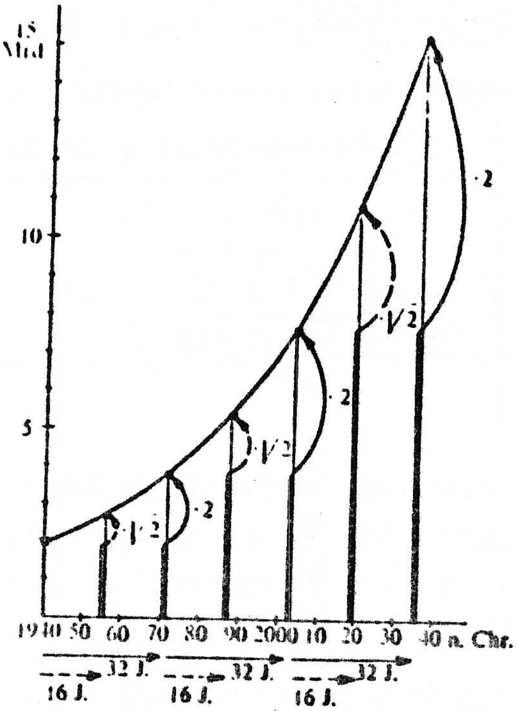
Damit ist die Rechtfertigung für das Durchziehen des Graphen gegeben.
Aus IIb folgt: Für 8 Jahre Wachstumsfaktor

$$\sqrt{\sqrt{2}} \approx \sqrt{1,414} \approx 1,189$$

für 4 Jahre

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx \sqrt{1,189} \approx 1,090$$

Allgemein: Halbierung heißt: Wachstumsfaktor radizieren



Damit ist auf einer dicht liegenden Menge von Zeitpunkten eine Funktion definiert welche die Grundeigenschaft I hat und monoton ist . ($\sqrt{a} > 1 \quad \forall\, a > 1$
$\sqrt{a} < 1 \quad \forall\, a < 1$)

Wir nennen nun jede monotone Funktion, die die Eigenschaft I
EXPONENTIELLE WACHSTUMSFUNKTION

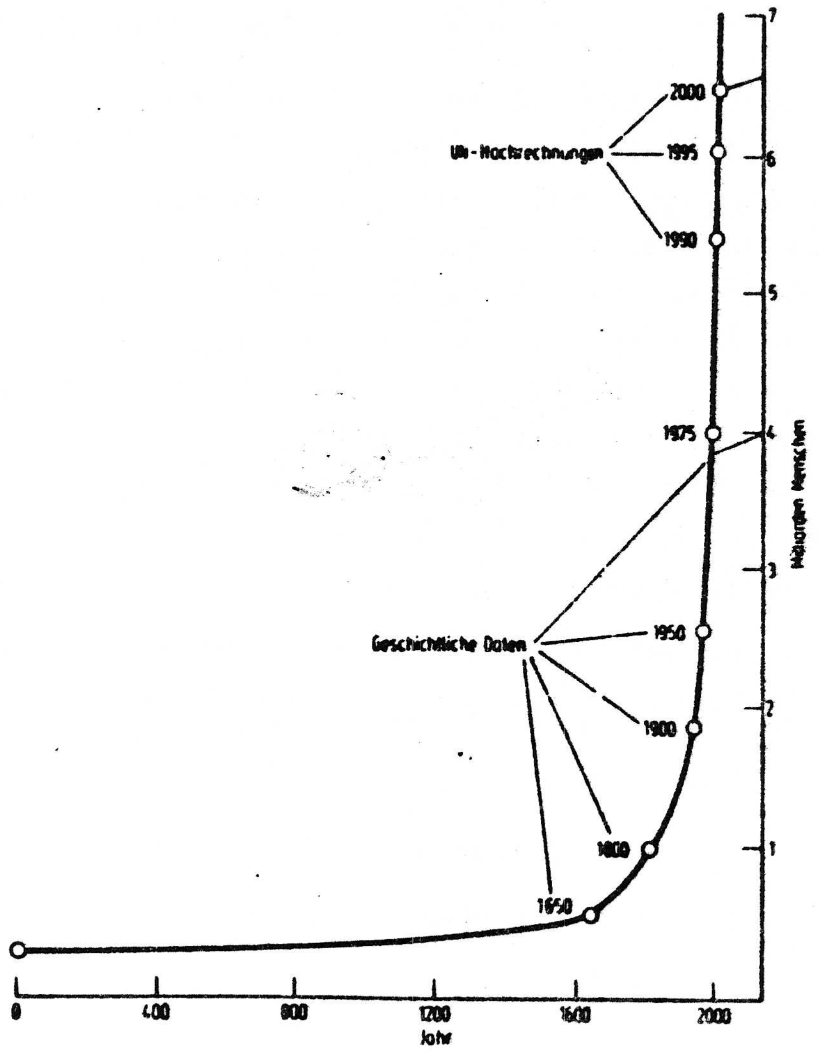
Man kommt leicht zur Überzeugung
Sind 2 Zeitpunkte mit voneinander verschiedenen (positiven) Funktionswerten gegeben, so gehört dazu genau eine Wachstumsfunktion, die für alle Zeitpunkte definiert ist.
Diese nimmt alle positiven Werte an.

Oder in der Ausdrucksweise der Koordinatenebene formuliert

> Durch je zwei Punkte der oberen Halbebene die auf keiner Parallelen zu den Achsen liegen geht genau eine exponentielle Wachstumsfunktion $R \rightarrow R^{+}$. Diese ist bijektiv.

Dabei werden Stellen und Werte als reelle Zahlen aufgefaßt, trotzdem sprechen wir von Zeitpunkten.
Dieser Sachverhalt ist durch das Vorstehende weitgehend begründet, aber noch nicht vollständig bewiesen.
Genaueres Eingehen auf den axiomatischen Weg ist auf dieser Stufe nicht zielführend.

Gerade das Bevölkerungswachstum kann als gutes Beispiel für die Grenzen des Wachstums genommen werden. Betrachtet man das Problem nämlich in historischer Sicht, so erkennt man, daß die Erdbevölkerung seit Christi Geburt sogar überexponentiell wächst.



Ab Christi Geburt dauerte es mehr als 16 Jahrhunderte bis sich die Erdbevölkerung verdoppelte (von 200 bis 300 Millionen auf 500 M). Die nächste Verdoppelungszeit war 200 Jahre (auf 1 Milliarde). Die nächste Milliarde kam nach 100 Jahren dazu und heute halten wir bei einer Verdoppelungszeit von 32 Jahren.
Es ist klar, daß ein solches undifferenziertes Wachstum (egal ob überexponentiell oder exponentiell) nicht unbeschränkt anhalten kann.
Um den Schülern das drastisch vor Augen zu führen lässt man folgende Beispiel rechnen:

> Nach wieviel Jahren wäre bei einer Verdopplungszeit von 32 Jahren die Masse der Erdbewohner größer als die Masse unseres "Raumschiffes" Erde?

Die einzig mögliche Entwicklung ist die, daß die Phase des undifferenzierten Wachstums abgelöst wird von einer Art organischem Wachstum, anders ausgedrückt: Es ist ein Übergang vom Wachstum zum Gleichgewic notwendig. Modelle für diese Art von Wachstum können erst in der 8. Klasse behandelt werden.

Schon auf dieser Stufe sollte man den Schüler auf die Gefahren der mathematischen Modellbildung hinweisen:

> Es wäre falsch, die reale Welt, die durch dieses Modell beschrieb werden soll, mit dem Modell zu identifizieren. Es wird ja auch niemand eine Landkarte mit der Landschaft verwechseln. Nur die wichtigsten Eigenschaften, die wir untersuchen, haben im Modell abstrakte Gegenstücke. Was wir herleiten, sind Eigenschaften des Modells und nicht der Wirklichkeit. Danach erst werden die Folgerungen in die Wirklichkeit zurückinterpretiert. Wenn das Modell brauchbar ist, muß es bekannte Erscheinungen erklären und neue voraussagen können
>
> Unser Modell ist nur bei Prozessen ohne Gedächtnis, ohne Altern oder Abnützung, ohne Unterstützung oder Behinderung der Individue anwendbar.

6. KLASSE

Lehrstoff: Einführung der Exponential- und Logarithmusfunktion.

Voraussetzungen: Man kann auf die Grundregeln I, IIa und IIb zurückgreifen. Außerdem sollte man vorher das Kapitel " Geometrische Folge " behandeln, sowie das Rechnen mit Potenzen über der Exponentenmenge Q.

Ein (zumindest für den Lehrer) heikles Kapitel ist die Erweiterung der Definition der Potenzen auf reelle Exponenten.

Schon die Behandlung der reellen Zahlen macht Approximationsprozesse nötig, die mit Hilfe des Taschenrechners dem Schüler plausibel gemacht werden können. Am besten wird diese Problematik durch einen Satz charakterisiert, den ich einem Skriptum von Prof R. Fischer entnommen habe:

> Der Schritt zur reellen Zahl besteht darin, daß die Möglichkeit , den Approximationsprozeß beliebig lange, gut und genau auszuführen, zur Zahl erklärt wird.

So wie die irrationale Zahl als Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen eingeführt wird ($\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ für $\alpha_n \in Q$), erscheint es sinnvoll, zu definieren: $a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}$, $\alpha_n \in Q$

Nach dieser Erweiterung des Potenzbegriffes kann man die Grundregeln IIa und IIb zu einer Regel zusammenfassen:

GRUNDREGEL II :	Für alle r aus R gilt: Zur r-fachem Zeit gehört die r-te Potenz des Wachstumsfaktors.

Damit hat man aber schon die verbale Formulierung der Definition der Exponentialfunktion, aus der sich ergibt:

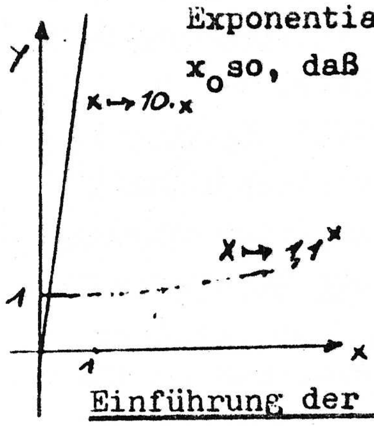
DEFINITION: Reelle Funktionen mit einer Zuordnungsvorschrift der Gestalt f: $x \mapsto c.a^x$ ($a \in R^+$) heißen EXPONENTIALFUNKTIONEN

Was dann folgt, ist Routinearbeit, die man in jedem Lehrbuch findet.

Im Rahmen dieses Lehrganges wäre es wichtig, die in den vorangegangenen Jahren behandelten Wachstumsprobleme zu wiederholen und die zugehörigen Funktionsgleichungen aufzustellen.

Bei den Eigenschaften der Exponentialfunktion sollte man unter anderem das besonders starke Wachsen dieser Funktionen deutlich machen:

Beispiel: Vergleiche die lineare Funktion $f: x \mapsto 10.x$ mit der Exponentialfunktion $g: x \mapsto 1{,}1^x$. Suche mit dem TR x_0 so, daß $g(x_0) \geqq f(x_0)$!



Mit dem TR ergibt sich:
Für $x_0 \geqq 69$ gilt:
$g(x_0) \geqq f(x_0)$.

Einführung der Logarithmusfunktion

Zuest sollte man sich überlegen, welche Grundaufgaben bis hieher lösbar sind:

Gegeben: $y = c.a^x$

Gegeben	Gesucht	Lösung
c,a,x	y	$y = c.a^x$
y,a,x	c	$c = y.a^{-x}$
y,c,x	a	$a = \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{x}}$
y,a,c	x	?

Mit dem Taschenrechner kann man diese Aufgabe näherungsweise schon seit der 4. Klasse lösen

Beispiel: Wachstum einer Bakterienkultur: $N(t) = 10^4.1{,}2^t$ (t in h)
Gesucht ist jene Zeit t, wo $N(t) = 10^5$ ist.

$$10^5 = 10^4.1{,}2^t \Leftrightarrow 10 = 1{,}2^t$$

Verallgemeinert man das Problem, so ergibt sich die Aufgabe:

Löse die Gleichung $a^x = b$ $\quad a,b \in R^+ \quad a \neq 1$

Läßt man den Schüler formulieren, was hier gesucht ist, so bekommt man folgende Definition:
x ist jener Potenzexponent, mit dem die Basis a potenziert werden muß, um b (den Numerus) zu erhalten.
Also : $x = {}^{a}\log b$
Danach muß das Rechnen mit Logarithmen ausführlich geübt werden. Das müssen aber nicht unbedingt sinnlose Beispiele sein. Man kann dazu die bisher ungelösten Beispiele aus dem Kapitel exponentielle Wachstumsfunktionen verwenden, etwa

Beispiel: $y = \dfrac{10\,000}{1-100.2^{-x}}$ Gesucht: x

Will man zeigen, daß man nur mit einer Basis auskommt, muß man folgenden Satz behandeln:
Satz: Für alle $a,b \in R^{+} \setminus \{1\}$ und $\alpha \in R^{+}$ gilt:
(*)

$$ {}^{b}\log \alpha = \frac{1}{{}^{a}\log b} \cdot {}^{a}\log \alpha $$

Um die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion behandeln zu können, muß man zuerst die Eigenschaften der Exponentialfunktion wiederholen:
Die Injektivität kann mit der strengen Monotonie erklärt werden.
Die Surjektivität kann mit Hife von Intervallschachtelungen durch den TR plausibel gemacht werden.

Auch wenn man heute nicht mehr mit Logarithmenbüchern rechnet (oder gerade deshalb), sollte man die Bedeutung des Logarithmus für das numerische Rechnen unterstreichen. Außerdem findet man für den in der 5. Klasse im Lehrplan stehenden Isomorphiebegriff sowieso zuwenig Anwendungsbereiche.
Schon bei diesem Kapitel verwendet man Funktionalgleichungen.
Eine wichtige Eigenschaft der Funktion $f: x \mapsto a^{x}$ ist:

$$ f(a+b) = f(a).f(b) $$

Die Abbildung f ist ein Isomorphismus von der Struktur (R,+) nach der Struktur (R^{+}, .),
Die Umkehrabbildung $f : x \mapsto {}^{a}\log x$ ist ein Isomorphismus der Struktur (R^{+}, .) nach der Struktur (R, +):

$$ \log(a.b) = \log a + \log b $$

Die Zahl e, die Funktionen $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto \ln x$

Die Meinungen über die Einführung der Zahl e gehen unter den Lehrern auseinander.
Die einen sagen, eine innermathematische Motivation sei erst auf Grund der Ableitungseigenschaften (8.Klasse) gegeben und man komme ja mit einer Basis aus (siehe Satz *).
Die anderen meinen, die " stetige Kapitalisierung "wäre für den Schüler eine bessere Motivation. Der Streit wurde durch den Lehrplan entschieden: e ist in der 6. Klasse einzuführen !

Beispiel: Ein Kapital K_0 wurde zu p% Zinsen angelegt. Wie hoch ist das Kapital am Ende des ersten Jahres, wenn die Zinsen jeweils nach a) 1 , b) 1/2 , c) 1/3, d) 1/n des Jahres zum Kapital geschlagen werden ?

a) $K_1 = K(1 + \frac{p}{100})$ setzt man $\frac{p}{100} = \lambda$ so ergibt sich:

$K_1 = K(1 + \lambda)$

b) $K_{1/2} = K(1 + \frac{\lambda}{2})^2$

c) $K_{1/3} = K(1 + \frac{\lambda}{3})^3$

d) $K_{1/n} = K(1 + \frac{\lambda}{n})^n$

Frage: Was passiert, wenn die Zinsperioden immer kürzer gewählt werden, also wenn $n \to \infty$?

D.h. existiert $\lim\limits_{n \to \infty}(1 + \frac{\lambda}{n})^n$

Um zur Zahl e als Grenzwert von $(1 + \frac{1}{n})^n$ zu kommen stört λ.
Deshalb nimmt man vorübergehend an, daß p = 100% ist also $\lambda = 1$
(Begrünung: Wucherer oder momentane Zinssituation).
Mit dem TR lassen sich sehr gute Näherungswerte für e erzielen.
Wenn man viel Zeit hat (was bei der Stoffülle in der 6. Klasse sehr unwahrscheinlich ist), könnte man auch beweisen, daß die zugehörige Folge streng monoton ist und daß 3 obere Schranke ist, mit anderen Worten, daß der Grenzwert existiert.

Für beliebige Werte für λ ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{\frac{n}{\lambda}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{\lambda} = e^{\lambda}$$

Bei stetiger Kapitalisierung beträgt das Kapital nach einem Jahr:

$$K = K_o \cdot e^{\lambda}$$

und nach t Jahren:

$$K = K_o \cdot e^{\lambda t}$$

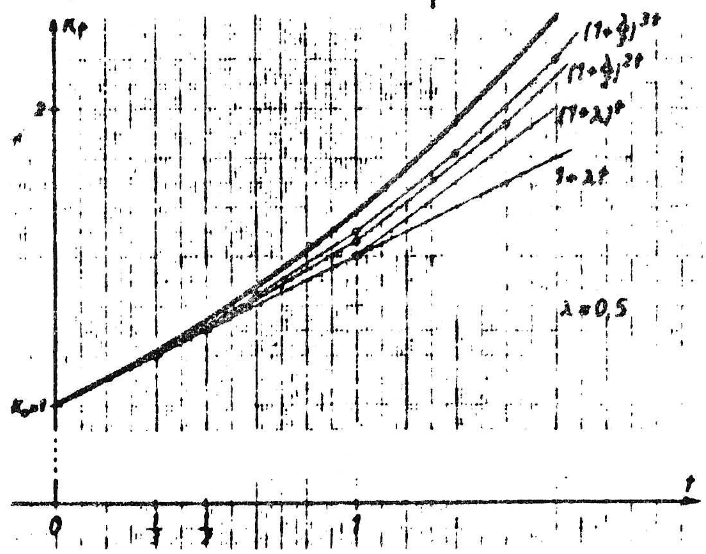
Zu beachten wäre, daß der Übergang von der sprunghaften zur stetigen Beschreibung des Wachstums bereits durch den Übergang von der Definitionsmenge N zur Definitionsmenge R erfolgt ist. Damit hat der Übergang von der jährlichen zur stetigen Verzinsung nichts zu tun, sondern es handelt sich hier nur um den Zugang zu einer speziellen Basis.

Um den Unterschied zwischen den verschiedenen Arten der Verzinsung klar zu machen, solltemen auch die Graphen skizzieren bzw Tabellen anfertigen:

Beispiel: $K_o = 10\,000$, $\lambda = 0{,}08$

Tab(11)

x	$K_x = K_o(1+\lambda)^x$	$K_x = K_o \cdot e^{\lambda x}$
1	10 800	10 832
5	14 693	14 918
10	21 589	22 255
100	21 997 613	29 809 580



8. KLASSE

Was steht zu diesem Thema im Lehrplan?

Exemplarische Behandlung der axiomatischen Methode;
Ableitungen der Funktionen $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto \ln x$,
die Differentialgleichung $y' = ky$

Ein wesentlicher Teil der Zeit wird aber vor allem für die Wiederholung des Lehrstoffes verwendet, also auch für die Wiederholung der Exponential- und Logarithmusfunktion. Die verbale Formulierung der Eigenschaften kann dann - motiviert durch Beispiele - zu den Funktionalgleichungen führen. Solche Gleichungen wurden schon bei der Einführung des Isomorphiebegriffes verwendet.

Beispiel: Gegeben sei eine Menge $N(t)$ von Individuen. Ihre Anzahl nimmt in gleichen Zeitintervallen um den gleichen Prozentsatz zu (oder ab).

Wählt man die Intervalle $[0,t]$ und $[h,t+h]$ und setzt einen konstanten Anfangswert $N(0)$ voraus, so ergibt sich

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \frac{N(t+h)}{N(h)} \quad \Big| \cdot \frac{N(h)}{N(0)}$$

$$\frac{N(t)}{N(0)} \frac{N(h)}{N(0)} = \frac{N(t+h)}{N(0)} \qquad \text{setzt man} \quad \frac{N(t)}{N(0)} = E(t)$$

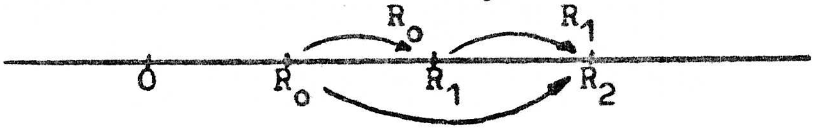
$$\boxed{E(t+h) = E(t)\,E(h)}$$

Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Beispiel: Das Weber-Fechnersche psychophysische Grundgesetz

Gegeben: Licht oder Schallquelle mit objektiver Reizstärke R_o.
R_o ruft in unseren Sinnesorganen eine subjektive Empfindung E_o hervor, die zur Reizstärke R_o nicht proportional ist. Wird die Reizstärke erhöht, $R_o \to R_1$, so hängt die Zunahme L der Empfindung nur vom Verhältnis $\frac{R_1}{R_o}$ der Reizstärke ab.

$$x = \frac{R_1}{R_o} \qquad y = \frac{R_2}{R_1}$$



$$z = \frac{R_2}{R_o} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_o}$$

$$E_1 - E_o = L\left(\frac{R_1}{R_o}\right) = L(x)$$

$$E_2 - E_1 = L\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = L(y)$$

1) $E_2 - E_o = (E_2 - E_1) + (E_1 - E_o) = L(x) + L(y)$

2) $E_2 - E_o = L\left(\frac{R_2}{R_o}\right) = L\left(\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1}{R_o}\right) = L(x.y)$

aus 1) und 2) folgt

$$\boxed{L(x.y) = L(x) + L(y)}$$

Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion

Bemerkungen zur exemplarischen Behandlung der Axiomatischen Methode

Wenn am Anfang dieses Vortrages die deduktive Methode eher negativ beurteilt wurde, zumindest was ihre Verwendung im Schulunterricht anlangt, so sollte das nicht bedeuten, daß die axiomatische Methode für den Mathematikunterricht bedeutungslos oder gar schädlich ist.
Die axiomatische Methode spielt im Gegenteil im genetischen Prozeß eine wichtige Rolle:

Sie ist einerseits als Endstufe dieses Prozesses aufzufassen und andererseits soll die Ordnung und Abstrahierung des Problems weitere Anwendungsbereiche erschließen.

Es erscheint sogar als eine Pflicht des Lehrers, die Denkweise der axiomatischen Methode, die Piaget als die "höchste Form der Intelligenz" preist, dem Schüler nahezubringen. Dazu gibt es sicherlich nicht erst in der 8. Klasse Gelegenheit.
Wichtig ist nur, daß man erst strukturieren soll, wenn es etwas zu strukturieren gibt. Darum halte ich das Kapitel Logarithmusfunktion für ein brauchbares Beispiel.
Das heißt: wir besitzen schon umfassende Kenntnisse über die durch die Axiome beschriebenen Dinge, mehr auf jeden Fall als durch die Axiome ausgedrückt wird. Wir machen bei der Ableitung der Sätze aus den Axiomen keinerlei Gebrauch von diesem Wissen und konzentrieren uns ausschließlich auf die Form der Axiome, in denen diese Begriffe auftreten.

D. Hilbert hat einmal gesagt, man könne statt Punkten, Geraden und Ebenen auch Tische, Stühle und Bierseidel sagen, weil es nicht auf die inhaltliche Bedeutung, sondern nur auf die Relationen ankommt.
Bei der Auswahl des Axiomensystems stehen nicht theoretische Überlegungen im Vordergrund, sondern eher praktische oder didaktische. Beim folgenden Beispiel war der vorrangige Beweggrund, es solle möglichst leicht sein, Begriffe der gegebenen Disziplin zu definieren und die Sätze herzuleiten.
Betonen sollte man auch, daß bei diesem Weg die Existenz einer Lösung ohne Beweis vorausgesetzt werden muß; eine Vorgangsweise, die aber typisch für die axiomatische Methode ist:

> Man sucht eine Funktion mit gewissen Eigenschaften.
> Man folgert aus diesen - unter Annahme der Existenz - andere Eigenschaften. Diese können aber wieder wertvolle Hinweise geben, wie man die Existenz beweist.

Dieses Problem sollte man den Schülern nicht verschweigen, sondern sogar eine Beweisidee angeben:

Etwa in Form von geometrischen Überlegungen bezüglich des Flächeninhalts unter der Hyperbel $x \mapsto \frac{1}{x}$. Man schiebt zwar die Schwierigkeit auf das Gebiet der Integralrechnung ab. Diese Überlegungen könnte aber umgekehrt als Motivation zur Behandlung von Integralen dienen.

Ich kann jedoch nicht mit F. Klein oder van der Waerden übereinstimmen, die diese Überlegungen zur Einführung der Logarithmusfunktion verwenden. Es ist nicht "anschaulich" für den Schüler, daß die Größe des Flächenstücks unter der Hyperbel erhalten bleibt, wenn man es unter der Hyperbel entlang verschiebt und dabei nur in dem Maß ausdehnt, in dem die Höhe verringert wird.

Vorschläge zur axiomatischen Kennzeichnung der Logarithmusfunktion

Bei Prof. Cigler liest man z.B.:

Wir nehmen an, es gäbe eine differenzierbare Funktion auf $]0,\infty[$ mit $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und fragen nach den Eigenschaften.
Bei diesem Vorschlag wird also die Differenzierbarkeit vorausgesetzt.

Der Vorschlag, der hier ausführlicher behandelt wird (er wurde von E. Baumgartner in der Zeitschrift DdM 1975 veröffentlicht), setzt keine besonderen Kenntnisse auf dem Gebiet der Differentialrechnung voraus:

Wir suchen eine Funktion $L: R^+ \to R$ mit folgenden Eigenschaften

(Axiom 1)	$L(x.y) = L(x) + L(y)$
(Axiom 2)	$L(x) \leqq x - 1$

Eine Motivation für das 2. Axiom ist durch die Vorkenntnisse der Schüler über die Logarithmusfunktion möglich:

Der Graph ist eine streng monoton steigende Rechtskurve, die durch den Punkt (1/0) geht.

Daraus folgt: Der Graph liegt nie oberhalb der Tangente und die Steigung der Tangente ist positiv.

Es gibt also ein $m \in R^+$ mit

$$f(x) \leqq m\,(x-1)$$

Sonderfall: $m = 1$

Auf dieser Basis lassen sich folgende Sätze beweisen:

SATZ (1): $L(1) = 0$

SATZ (2): $\forall\, x,y \in R^+$: $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$

Sonderfall: $L\left(\frac{1}{y}\right) = -L(y)$ (wegen (1))

SATZ (3): $\forall x \in R^+$ und $n \in Q$ gilt

$$L(x^n) = n\,L(x)$$

SATZ (4): $\forall\ x \in R^+$:

$$1 - \frac{1}{x} \leqq L(x)$$

Folgerung: $\forall x,y \in R^+$: Aus $x < y$ folgt

$$L(y) - L(x) = L\left(\frac{y}{x}\right) \geqq 1 - \frac{x}{y} = \frac{y-x}{y} > 0$$

$$L(x) < L(y)$$

SATZ (5): L wächst auf R^+ streng monoton

L ist injektiv

SATZ (6a): $L(R^+)$ ist nach oben unbeschränkt

(6b): $L(R^+)$ ist nicht nach unten beschränkt

Beim Beweis verwendet man die archimedische Eigenschaf der reellen Zahlen:

Zu jeder reellen Zahl K gibt es eine natürliche Zahl N mit $N > \frac{K}{L(2)}$ $(L(2) > L(1) = 0)$

$$N.L(2) > K$$

$$L(2^N) > K$$

SATZ (7): L ist stetig auf R^+

Zum Beweis schätzt man $L(y) - L(x) = L\left(\frac{y}{x}\right)$ durch

$$\frac{y-x}{y} \leqq L(y) - L(x) \leqq \frac{y-x}{x}$$ ab.

Aus (6ab) und (7) folgt

SATZ (8): $L: R^+ \to R$ ist surjektiv

SATZ (9): L ist differenzierbar auf R^+ mit $L'(x) = \frac{1}{x}$

Wieder verwendet man die Abschätzung für

$$L(x+h) - L(x) = L\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

SATZ (10): Aus $L(1) = 0$ und dem Mittelwertsatz folgt:
Es gibt höchstens eine Lösung für L

Man könnte den Beweis der Stetigkeit auch weglassen. Auch das Monotonieverhalten könnte mit Hilfe des Mittelwertsatzes erklärt werden. Es sollte nur gezeigt werden, daß man bis zum SATZ (8) auch ohne Differentialgleichung auskommt. Schon nach diesem Satz könnte die Definition und Diskussion der Umkehrfunktion kommen.

Definition: Es gibt eine Funktion $E: R \to R^+$ mit

$$L \circ E = E \circ L = id.$$

E hat folgende Eigenschaften:

(a) $E(0) = 1$

(b) Für alle $x, y \in R$ gilt $E(x+y) = E(x)\,E(y)$

Beweis $L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x)) + L(E(y)) = x + y$

nun wendet man auf beide Seiten der Gleichung E an

(c) $E(x - y) = \frac{E(x)}{E(y)}$

(d) Für alle $x \in R$ und $n \in Q$ gilt:

$$E(n\,x) = E(x)^n$$

Setzt man $x = 1$ und $E(1) = e$ so ergibt sich

$$E(n) = E(1)^n$$
$$E(n) = e^n$$

Wegen dieser Beziehung bietet sich die Funktion E zur Fortsetzung der Definition der Potenzen der Zahl e auf R an.

Definition: $e^x := E(x)$

(d.h. jene positive reelle Zahl, für die gilt $L(E(x)) = x$)

Was jetzt noch fehlt, wäre zu zeigen, daß die hier als $E(1)$ eingeführte positive reelle Zahl e mit der in der 6. Klasse eingeführten Eulerschen Zahl e übereinstimmt.

SATZ (11): $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

(e soll hier als $E(1)$ aufgefaßt werden)

Beim Beweis zeigt man, daß

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x \quad \text{ist} \qquad (\ln e^x = x)$$

$$\ln\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = x\cdot\frac{n}{x}\ln\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1}\right) =$$

$$= x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln 1}{\frac{x}{n}}$$

Setzt man $\frac{x}{n} = h$, so ergibt sich für $n\to\infty$: $h\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} =$$

$$= x\ln'(1) = \underline{\underline{x}}$$

Die Differentialgleichung $y' = k\,y$

Durch diese Differentialgleichung werden neue Anwendungsbereiche auf dem Gebiet des exponentiellen Wachstums erschlossen.

Beispiel (1): Gegeben sei eine Größe $x(t)$, die sich mit der Zeit ändert. Die einfachste Annahme ist die des unabhängigen Wachstums:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \text{mit der Lösung} \quad x = x_o\cdot e^{\lambda t}$$

Man kann aber auch ein Modell für den Fall angeben, daß die Individuen einander beeinflussen.

Beispiel (2): Annahme: Die Individuen helfen einander. Die Geburtenrate pro Individuum ist proportional zur Bevölkerungsgröße $x(t)$ (es wächst auch die Zahl der Helfer)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x^2 \quad \text{mit } x(t) = \frac{a}{1-\lambda t}$$

Dieses Modell ist weniger interessant, da sich nach einer endlichen

Zeit ein unendliches Wachstum ergibt. Es könnte höchstens zur Beschreibung von Explosion oder Kettenreaktionen verwendet werden.

Beispiel (3): Annahme: Die Individuen behindern einander.
Die Anzahl der vorhandenen Existenzplätze ist beschränkt.
Die Änderungsgeschwindigkeit ist proportional zur Zahl x und zur Anzahl $n-x$ der noch vorhandenen Plätze:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x (n - x)$$

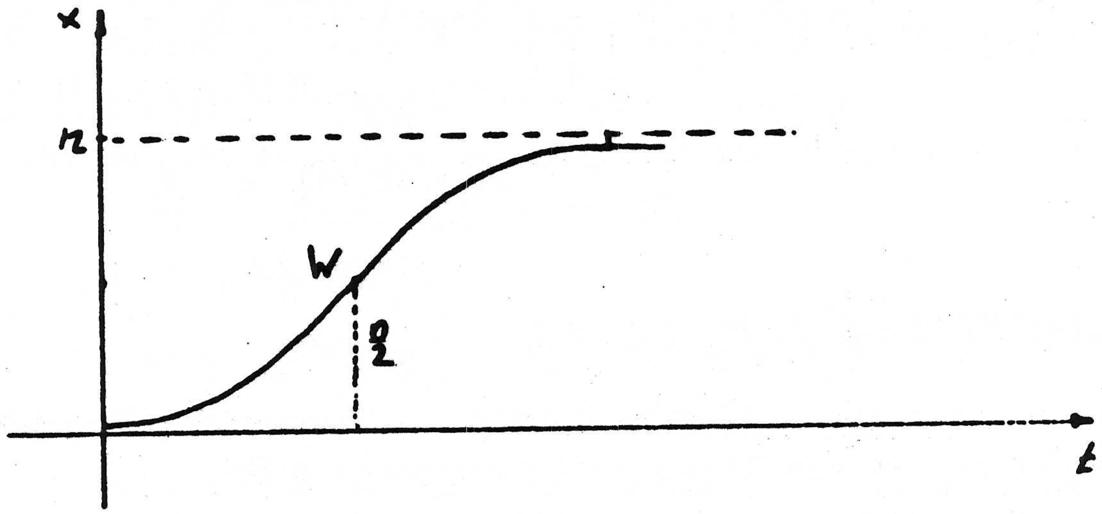
$$\frac{dx}{dt} = \lambda x n - \lambda x^2$$

Lösung:

$$x(t) = \frac{n a}{a + (n - a) e^{-\lambda n t}}$$

wobei $x(0) = a$

Graph: Logistische oder autokatalytische Kurve von Verhulst (1844)



Dieses Modell ermöglicht wieder eine große Zahl von Anwendungsgebieten

- Die Ausbreitung eines Gerüchtes
- Die Autokatalyse in der Chemie
- Der Ausbau des Verkehrsnetzes
- Die "soziale Diffusion", d.h. Nachahmungsprozesse wie neue Ideen, Mode, technische Neuerungen, neue Heilmittel usw.

Schlußbemerkungen

Ich habe versucht einen Weg vorzuführen, der den Schüler anregen soll, sein "Bild von der mathematischen Wirklichkeit" zu erweitern.

Ich bin aber Realist genug, um zu sagen, daß man sich auch vom genetischen Prinzip keine Wunder erwarten darf. Denn um Erfolg zu haben, braucht man auch aktive Schüler, und es liegt nicht nur am mangelnden Geschick der Lehrer, wenn die Schüler zur aktiven Teilnahme am Unterricht nicht bereit sind.
Die meisten Schüler wünschen sich doch einen aktiven Lehrer, der viel erzählt, dem man gemütlich zuhören kann, der von jeder Aufgabe, die man lösen soll, ein typisches Beispiel vorrechnet.

Kurz - um mit Freudenthal zu schließen - man darf nicht meinen, daß die Gewissensbisse des Lehrers den Schüler jucken.
Mein Zusatz ist: Wir Lehrer sollten aber zumindest als Juckpulver fungieren.

LITERATUR

Baumgartner E.: Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktion in der Sekundarstufe II. DdM 1/1975

Bürger-Fischer-Malle: Mathematik Oberstufe Band 2 Hölder-Pichler-Tempsky Wien

Christmann N.: Einführung in die Mathematik- Didaktik, VIEWEG

Engel A.: Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle. Der Mathematikunterricht 3/1971

Fischer R.: Pädagogik für Lehrer an Höheren Schulen. Lehrbrief für das Fernstudium. Universität Klagenfurt.

Freudenthal H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band1, Band 2 Klett Studienbücher

Kirsch A.: Wachstumsprozesse und Exponentialfunktionen DdM 4/1976

Klein F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Band 1 Springer 1933.

Laub J.: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe an AHS. Bd.2, Bd. 3 Hölder-Pichler-Tempsky Wien

Mesarović/Pestel: Menschheit am Wendepunkt RoRoRo 6997

Tarski A.: Einführung in die mathematische Logik. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen.

Prof.Mag. Helmut Heugl
BG und BRG Stockerau
Unter den Linden 17
2000 Stockerau